

Θέμα 1. (2 μον.)

Έστω (Y, d) ένας μετρικός χώρος X ένα σύνολο και $f : X \rightarrow Y$ μια συνάρτηση. Ορίζουμε $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με $\rho(x, y) = d(f(x), f(y))$ για κάθε $x, y \in X$.

- α) Αν η συνάρτηση f δεν είναι 1-1 να δείξετε ότι η ρ δεν είναι μετρική στο σύνολο X .
β) Αν η συνάρτηση f είναι 1-1 δείξτε ότι η ρ είναι μετρική στο σύνολο X . Σε αυτή την περίπτωση να βρείτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ να είναι ομοιομορφισμός.

Θέμα 2. (2 μον.)

Αν A είναι ένα κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R} και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση να δείξετε ότι το γράφημα της f , δηλαδή το σύνολο $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in A\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . [Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε τον χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων με χρήση ακολουθιών.]

Θέμα 3. (2 μον.)

- α) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Να δώσετε τον ορισμό της κλειστής θήκης \bar{A} του A , του παραγώγου συνόλου A' του A και να δείξετε ότι $\bar{A} = A \cup A'$.
β) Δίνουμε τον εξής ορισμό. Ένα υποσύνολο P ενός μετρικού χώρου (X, ρ) λέγεται τέλει αν το P είναι κλειστό σύνολο και δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Να δείξετε ότι το P είναι τέλει αν και μόνο αν $P' = P$.

Θέμα 4. (2 μον.)

- α) Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και x_0 ένα σημείο του X που ικανοποιεί την εξής ιδιότητα: “Για κάθε πυκνό υποσύνολο D του X ισχύει $x_0 \in D$ ”. Να δείξετε ότι το μονοσύνολο $\{x_0\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X .
β) Να αναφέρετε όλα τα υποσύνολα του \mathbb{R} που είναι ταυτόχρονα συμπαγή και συνεκτικά (δίνοντας απλά μια σύντομη εξήγηση) και να τα κατατάξετε ως προς ομοιομορφισμό (με αναλυτική εξήγηση).

Θέμα 5. (2 μον.)

Θεωρούμε το μετρικό χώρο (\mathbb{R}, ρ) όπου ρ είναι η συνήθης μετρική και το σύνολο \mathbb{Q} των ρητών αριθμών με τη σχετική μετρική. Θεωρούμε το σύνολο $E = \{x \in \mathbb{Q} : 2 < x^2 < 3\}$. Να δείξετε ότι το E είναι φραγμένο και κλειστό (ως προς τη σχετική μετρική) υποσύνολο του \mathbb{Q} αλλά δεν είναι συμπαγές.

Καλή Επιτυχία!